陈文灯数学提高班例题

（高等数学）

Published by CruSH Studio

2001.9.1

重要信息

名称：陈文灯提高班例题
科目：高等数学
主讲：陈文灯
地点：西安电子科技大学礼堂
时间：2001.8.19-2001.8.25
课时：48 课时
笔记：Pely Gan，Momo，Yanzi
录入：Pely Gan
排版：Pely Gan
Pack：Pely Gan
发布时间：2001.9.1

补充说明：有几道题大家都没有记全，所以我这里也没有（讲得太快了），答案也是，好多题的答案都没有给，我现在刚开学，又在上任汝芬政治，实在是没有时间，所以只能用***来代替了，如果大家有什么问题，可以给我发信，mailto:pely@china.com?subject=关于数学例题

废话：

本来是打算在 8.30 日发布的，为了更快，我使用了服务器（哈哈，真的很快的），但是，古人说的好，欲速则不达，服务器的硬盘坏了，数据也取不出来。还好在保修期内，否则，一块硬盘￥5000，我就惨了。幸亏还有备份，只能用我的 PC 来搞了，今天才弄完。
也许是老天为了补偿我吧，哈哈，搞到了一块 30G 的硬盘，今天服务器的硬盘也换好了（联想的服务还算好吧，就是慢了一些）。

祝大家考研成功

第一讲 极限与连续

一、概念、定理、公式

【eg1.1】设 $f(x),g(x)$ 均连续，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$，令

$F(x)=\int_0^{x^2}f(x)dx, G(x)=\int_0^x t\cdot g(x-t)dt$，则当 $x\to0$ 时，$F(x)$与$G(x)$ 是[ ]

[A]F(x)比 G(x)高阶的无穷小 [B]G(x)比 F(x)高阶的无穷小
[C]F(x)比 G(x)是等价无穷小 [D]F(x)比 G(x)同阶且非等价无穷小

【例 1.2】当 $x\to0, f(x)=2x-\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x$ 是 x 的几阶无穷小？

【例 1.3】当 $x>0$ 时，$\sqrt{1-2x}\sim1+ax+bx^2$，确定 a，b 的值。

【例 1.4】求 $f(x)=\frac{\ln -x)}{x^2-2x-3}$ 的间断点并判断其类型。

【例 1.5】设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=C$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=?$

【例 1.6】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x\sqrt[n]{x+3}dx$

【例 1.7】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}+)$

【例 1.8★】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$

【例 1.9】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$

★“1”的极限的求法

【例 1.10】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

【例 1.11】（1）求 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]^{\frac{1}{\sin x}}$ （1^∞ 型）

（2）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(100x^{100}+2x+3)}{\ln(x^{10}+3x^2+2)}$ （$\frac{\infty}{\infty}$ 型）

【例 1.12】设 $f(x)$ 为多项式，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-5x^3}{x^2}=4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

二、各类极限的求法

★(1)极限式中参数的确定

【例 1.13】$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}+\lambda x+\mu)=0$，求 λ

【例 1.14】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+\sin x}{\int_x^b \dfrac{f\ln(1+t^3)}{t}dt}=C,(C\neq 0)$，确定 a，b，c

★【例 1.15】设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{1+x^{2n}}c$,出处处类型联系，连续，确定a与b的 值（)[x 为参数]]

⑵未定式定值法法

① $\dfrac{0}{0}$ 型

【例 1.16】计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{fx-\arcsin x}{\ln(1+x^3)}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(-\cos\sqrt{x})}$

(3)设 $f(x)$ 在项 $x=1$ 的邻域内具有一阶连续导数，$f(1)=0, f'(1)=6$

求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x (t\int_1^t f(u)du)dt}{(x-1)^3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

【例 1.17】设 $\vec{a},\vec{b}$,为三维变量，$|\vec{b}|=1,\vec{a}\wedge\vec{b}=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}$

② $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的方法与①相似。

③ $\infty-\infty$ 型，通过通分或分式有理化转换成 $\dfrac{0}{0}\quad or\quad \dfrac{\infty}{\infty}$

【例 1.18】求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot\tan^2 x)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\cdot\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

④ $0\cdot\infty$ 型，转化成 $\dfrac{0}{0}\quad or\quad \dfrac{\infty}{\infty}$

【例 1.19】求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln(x+\dfrac{3}{x})$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\dfrac{3}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

⑤ $0^0,1^\infty,\infty^0\Rightarrow 0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}\quad or\quad\dfrac{\infty}{\infty}$

【例 1.20】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\ln(1+x)}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}$

(3)、函数的极限

①利用函数极限求下列极限

【例 1.21】 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n \quad (a>0,b>0,c>0)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

②利用单增（单减）有上界（下界）数列必有极限定理求极限

【例 1.22】　设 $x_1=1,\ x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$

③n 项和，当 $n\to\infty$ 的极限

【例 1.23】　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\ldots+\dfrac{1}{1+2+\ldots+n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n^2+3}}{n^2}+\ldots+\dfrac{\sqrt{n^2+n-1}}{n^2}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\right)$

④n 项乘积：当 $n\to\infty$ 时的极限

【例 1.24】求下列极限

(1) 当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]$

第二讲　导数与微分

基本概念

【例 2.1】　设 f(x)在 X_0 处可导，则

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-3\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=$ ________

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0+5\Delta x\right)}{\Delta x}=$ ________

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0-2\Delta x\right)-f\left(x_0-4\Delta x\right)}{\Delta x}=$ ________

【例 2.2 】 设 f(x)连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f\left(x\right)}{x-1}\right)=3$，求 f'(1)。

【例 2.3】 设 $\varphi\left(x\right)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ f(x), & x=0\end{cases}$，$f(x)$在$x=0$处可导，令$F_x=f(\varphi(x))$，求$F'(0)$.

【例 2.4】求下列导数

(1) $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$,求$f'(-1)$

(2) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，求$f'(0)$.

【例 2.5】设$f(x)$在$x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^{f(x)+1}}=1$，求$f'(0)$

【例 2.6 ★】设 f（x）在 $[0,+\infty)$ 内有定义，$f'(1)=a(a\neq 0)$，且对于 $\forall x,y\in[0,+\infty)$,有$f(xy)=yf(x)+xf(y)$，求$f(x)$.（概念性很强，可能考）

【例 2.7】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有连续的导数，令 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 F(x)在 x＝0 处可导的〖 〗

（A）充分非必要条件 （B）必要而非充分 （C）充分必要 （D）既非充分也非必要

【例 2.8】设 F(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $f(x+1)=2f(x)$，当 0≤x≤1 时 $f(x)=x(1-x^2)$，问 f(x)在 x＝0 处可导吗？

【例 2.9】设 $y=f(x)$ 三阶可导且 $f'(x)\neq 0$，用 $f'(x),f''(x),f'''(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 的三阶导数$\varphi'''(y)$。

二. 各类函数导数的求法

【例 2.10】设 $y=\sin x^2$，求$\dfrac{dy}{d(x^2)},\dfrac{dy}{d(x^3)}$

【例 2.11】设 $y=f(\dfrac{2x-1}{2x+1})$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $y'\big|_{x=0}$

【例 2.12】求下列导数

$(1)F(x)=\int_0^x f(x)dy$，求$F'(x)$

$(2)F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求$F'(x)$

$(3)F(x)=\int_0^x t\cdot f(x-t)dt$，求$F'(x),F''(x)$

【例 2.13】设有方程$2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t dt$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

【例 2.14】设$Z=xy+\frac{y}{x}$由，方程$x^2+y^2=1$确定 y 为 x 的函数，求$\frac{dZ}{dx}$

【例 2.15】设$y=x^{3x}+x^x+e^{\sqrt{x\sqrt{x}}}$，求$y'$

【例 2.16】设$\begin{cases}x=\cos(t^2)\\ y=\int_0^{t^2}\sin u\cdot e^{u^2}du\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

【例 2.17】设$\begin{cases}x=\int_0^t \frac{y}{(2-u)^4}dy\\ y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}t^{n-1},\quad |\frac{t}{2}|<1\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$

【例 2.18】设 f(x)连续，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，令$F(x)=\begin{cases}\int_0^1 f(xt)dt & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{\sin x^2}{x} & x>0\end{cases}$，求$F'(x)$

【例 2.19★】设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{x(x-1)}+ax+b}{1+e^{x(x-1)}}$处处可导，确定常数 a 和 b

【例 2.20】设$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，g(0)＝1，g(x)具有二阶连续导数，求

a 为何值时，f(x)连续

求$f'(x)$

讨论$f'(x)$的连续性

三、高阶导数

【例 2.21】求$y=\frac{x^3}{x^2-2x-3}$的 n 阶导数（n≥2）

【例 2.22】设$y=\sin x\cos 2x\cos 3x$，求$y^{(n)}$

第三讲　不定积分

一、基本概念和重要公式

二、第一换元积分法（凑微法）（★）

【例 3.1】求下列积分

(1)$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1-x}{1+x}dx$　(2)$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$　(3)$\int\frac{\sqrt{\ln(1-x)-\ln x}}{x(1+x)}dx$　(4)$\int\frac{\sin 2x}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^{3/2}}dx$

【例 3.2★】计算 $I=\int[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(x)f^2(x)}{f'^3(x)}]dx$

【例 3.3】求下列积分

(1)$\int\frac{1-x^5}{x(1+x^5)}dx$　(2)$\int\frac{1}{x^4+1}dx$　(3)$\int\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}dx$　(4)$\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

三、第二换元积分法

【例 3.4】求下列积分

(1)$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$　(2)$\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx$　(3)$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$

四、分部积分法

【例 3.5】求下列积分

(1)$\int(2x^2-3x+1)e^{-2x}dx$　(2)$\int x^2\cos 3xdx$

【例 3.6】求下列积分

(1)$\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan xdx$　(2)$\int(\arcsin x)^2dx$　(3)$\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx$

【例 3.7★】求下列积分

(1)$\int\sin(\ln x)dx$　(2)$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}dx$　(3)$\int\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

【例 3.8】计算 $\int\ln[(x+1)^{x+1}(x+2)^{x+2}]\cdot\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

五、有理函数积分

【例 3.9】设积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数，是确定 a、b、c 的关系。

【例 3.10】求下列积分

(1)★ $\int\frac{3x^2+2x+4}{(x-2)^{100}}dx$　(2)$\int\frac{x^{11}}{x^8-2x^4-3}dx$　(3)$\int\frac{x^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2}dx$

六、简单无理函数积分

【例 3.11】求下列积分

$(1)\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$　　$(2)\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$　　$(3)\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1}dx$

7、三角有理函数的积分

【例 3.12】求下列积分

(1)★ $\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}d^{x}dx$　　$(2)\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$　　$(3)\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}$　　$(4)\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

【例 3.13】求下列积分（“1”的活用）

$(1)\int\sqrt{1-\sin x}dx$　　$(2)\int\frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$

第四讲　中值定理(★)

一、连续函数在闭区间上的性质

【例 4.1.1】设 f(x)在[a,b]上连续，且 f(x)>0，

证明：存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$

【例 4.1.2】设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

证明：存在一个$\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得$\xi+f(\xi)=0$。

【例 4.1.3】设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$f[f(x)]=x$

证明：至少存在一个$x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得$f(x_0)=x_0$。

【例 4.1.4】设$f(x)$在[a, b]上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$Ci>0(i=1,2\cdots n)$

证明：存在一个$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}$

【例 4.1.5】设$a_1,a_2,\cdots,a_n$这些实数满足关系式$a_1-\frac{a_2}{3}+\frac{a_3}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$

证明：方程$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$在$(0,\frac{\pi}{2})$内存在一个实根。

二、微分中值定理

【例 4.2.1】设$f(x)$在[0, 1]上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\le A$

证明：$|f'(x)|<\frac{A}{2}$

题型 1：验证给定函数 f (x) 满足某定理

【例 4.2.2】验证：$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2} & x\le 1\\ \frac{1}{x} & x>1\end{cases}$ 在[0,2]内满足拉氏定理。

题型 2： $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明

【例 4.2.3】设 $f(x)$在$[0,2]$上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(1)$, $f(2)=\int_1^{3/2}f(x)dx$

证明：存在一个$\xi\in(0,2)$，使$f''(\xi)=0$ 。

【例 4.2.4】设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f_+'(a)\cdot f_-'(b)<0$

证明：存在一个ξ，使得$f'(\xi)=0$ 。

题型 3：由 $a,b,f(a),f(b),\xi,f(\xi),f'(\xi)$ 所构成的代数式的证明。（使用辅助函数）

【例 4.2.5】设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0,a>0$，

证明： $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$ 。

【例 4.2.6】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(0)=0$ ，当 $x\in(0,1),f(x)\neq 0$，

证明：对于一切自然数 n，存在一个$\xi\in(0,1)$，使得$\mathrm{n}\cdot\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。

【例 4.2.7】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 xf(x)dx$

证明：存在一个$\xi\in(0,1)$，使得$\int_0^{\xi}f(x)dx=0$ 。

【例 4.2.8】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=\int_0^{1/3}e^{1-x^2}f(x)dx$，

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$

【例 4.2.9】设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，

证明：存在一个$\xi\in(a,b)$，使$\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$

题型 4★：命题：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得关于ξ,η的关系式成立。（使用两次拉氏，或两次柯西，或一次柯西，一次拉氏）

【例 4.2.10】设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=f(b)=1$，

证明：$\exists\xi,\eta$，使得$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

【例 4.2.11】设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f'(x)\neq 0$，

证明： $\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$ 。

第五讲　定积分

性质及其应用

(1)估值

【例 5.1】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续， $f(0)=3$，且当x,y都是$\in[0,1]$时有有$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$，对$\int_0^1 f(x)dx$进行估值。

(2)证明不等式

【例 5.2】设 $f(x)$在$[1,+\infty)$内连续且单减，

证明：$\int_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1)+\int_1^n f(x)dx$

【例 5.3】证明：$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$

【例 5.4】设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续的导数，

求：$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$

【例 5.5】设$b>a>0$，证明：∃一个$\xi\in[a,b]$使$\xi^2=\frac{a^2++ab+b^2}{3}$

【例 5.6】计算$I=\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

定积分的计算

(1)利用牛－莱公式

【例 5.7】计算$I=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

(2)定积分的换元法

【例 5.8】求下列积分

(1)$\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　(2)★ $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(3)分部积分法

【例 5.9】求下列积分

(1)$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$　　(2)$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

特殊类型的定积分的计算

(1)分段函数的定积分计算

【例 5.10】设 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>1\\ \frac{1}{1+e^x}, & x\leq 1\end{cases}$，求$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

【例 5.11】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ e^x, & x<0\end{cases}$，计算 $I=\int_1^3 f(x-2)dx$

⑵含有绝对值符号的定积分计算（先求零点）

【例 5.12】求下列积分

(1)$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$　　(2)$\int_{-5}^{4}|x^2-2x-3|dx$　　(3)$\int_{-1}^{1}|x-y|e^x dx, |y|<1$

⑶含有变上限（变下限）的积分的计算（★）

【例 5.13】设 $f(x)=\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}dy$，计算 $\int_0^a f(x)dx$

【例 5.14】设 $f(x)=\int_{x+1}^{2}e^{-y^2}dy$，计算 $I=\int_1^3 f(x)dx$

【例 5.15★】设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，$\int_0^1 f(x)dx-A$，计算 $I=\int_0^1(\int_x^1 f(x)f(y)dy)dx$

【例 5.16】设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对 $\forall x,y$有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，计算

$$I=\int_{-l}^{l}(2+\cos x)f(x)dx$$

【例 5.17】设 $f(x),g(x)$ 均为连续函数，$g(x)$ 为偶函数，$f(x)+f(-x)=A$

证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_{-a}^{a}f(-t)g(-t)(-dt)$

【例 5.18】求 $I=\int_0^{\pi/2}\dfrac{1}{1+(\tan x)^{2002}}dx$

定积分等式的证明

【例 5.4.1】设 $f(x)$在$[0,1]$连续，证明：$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

【例 5.4.2★】设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，证明：$\int_2^4\dfrac{f(x+3)}{f(x+3)+f(9-x)}dx=\int_2^4\dfrac{f(9-x)}{f(x+3)+f(9-x)}$，

并计算$\int_2^4\dfrac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx$

【例 5.4.3】证明：$\int_0^x e^{xt-t^2}dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^{x^2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx$

【例 5.4.4】证明：$\int_x^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\int_x^{1/x}\dfrac{1}{1+x^2}dx$

【例 5.4.5】设 $f(x)$ 可导且单增，$f(0)=0,f(a)=b,g(x)$是$f(x)$的反函数，

证明：$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(x)dx=ab$

【例 5.4.6】证明：$\int_0^a(\int_0^u f(t)dt)du=\int_0^a(a-u)f(u)du$

【例 5.4.7】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续，

证明：$\int_0^1 f(x)dx=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$

【例 5.4.8】设 $f(x)$ 具有二阶连续的导数，

证明：存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{24}f''(\xi)$

【例 5.4.9】设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有二阶连续的导数，且 $f(0)=0$，

证明：$\exists$ 一个 $\xi\in[-a,a]$ 使得 $f''(\xi)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^a f(x)dx$

定积分不等式的证明

(1)利用单调，保号性证明

【例 5.5.1】设 $f(x)$ 在[a, b]上单增，证明：$\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

(2)利用辅助函数证明

【例 5.5.2】设 $F(x)$ 在[a, b]上连续可导，证明：$(\int_a^b f(x)dx)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$

【例 5.5.3】设 $f(x)$ 在[a, b]上连续，且为正函数（即 $f(x)>0$），

证明：$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geqslant(b-a)^2$

(3) 告知被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又知 $f(a)=0$ or $f(b)=0$ or $f(a)=f(b)=0$，有关命题的证明。

【例 5.5.4】设 $f(x)$ 在[a, b]上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=0, f'(x)\le M$

证明：$\int_a^b f(x)dx\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2M$

【例 5.5.5】设 $f(x)$ 在[a, b]上不恒为 0，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，

证明：存在一个 $\xi\in[a,b]$，使得 $|f'(\xi)|>\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$

【例 5.5.6】设 $f(x)$ 在[a, b]上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=0$，

证明：$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$

(4)利用台劳公式证明不等式

【例 5.5.7】设 $f(x)$ 处处二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$，$u(t)$ 处处连续，$a>0$

证明：$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt \ge f(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt)$

六、广义积分

【例 5.6.1】讨论广义积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}(|x|+\alpha)e^{-x}dx$ 的敛散性，收敛时求其和。

【例 5.6.2】计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}dx$

【例 5.6.3】计算 $I=\int_1^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]dx$

第六讲　一元函数微积分的应用

一、函数增减性的判别

【例 6.1】设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$f(0)=0$，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f'(x)$ 单增，令 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，

证明：$F(x)$ 在 $(0,a)$ 内单增

【例 6.2】求 $f(x)=\int_1^x(1-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$ 的单减区间。$(x>0)$

【例 6.3】证明：当 $x>1$ 时，$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$

二、函数的极值与最值

【例 6.4】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $f(0)=0$，又 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是[　]　　[A]不可导　[B]可导但 $f'(0)\ne 0$　[C]极大值　[D]极小值

【例 6.5】设有方程 $3f(x)+4x^2f(-\frac{1}{x})+\frac{7}{x}=0$，求 $f(x)$ 的极值

【例 6.6】在抛物线 $x^2=4y$ 上求一点，使之到 y 轴上一定点 $P(0,b)$ 的距离最小。

三、图形的凹凸性及拐点

【例 6.7】设函数 $\varphi(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，且 $\varphi(x)>0$，令 $f(x)=\int_{-a}^a|x-t|\varphi(t)dt$，判别 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的凹凸性。

【例 6.8】求函数 $y=f(x)=x^3\sqrt{x-1}$ 的拐点。

四、渐近线

【例 6.9】设 $y=f(x)=\frac{(x^2-2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$，求其渐近线。

【例 6.11】设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足关系式 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$

证明：方程 $a_0+a_2x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$在$(0,1)$ 内有一个实根。

【例 6.12】研究方程 $\ln x-\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 的根的个数。

【例 6.13】设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$内$f'(x)>k>0$，k 为常数，且 $f(a)<0$，

证明：$f(x)=0$在$[a,a+\frac{|f(0)|}{k}]$ 有且仅有一个实根。

【例 6.14】设 $f(x)$在$[1,+\infty)$ 上连续，$f''(x)\le 0, f(1)=2, f'(1)=-3$，

证明：$f(x)=0$在$(1,+\infty)$ 上有且仅有一个实根。

【例 6.15】求由曲线 $y=f(x)(\ge 0)$ 与直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积，绕 x 轴所得的旋转体的体积。

【例 6.16】求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 于 x 轴所围成的封闭图形绕直线元

旋转所得的旋转体的体积。

【例 6.17】过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线 PQ，求以该切线 PQ 与抛物线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积。

【例 6.18】求双曲线 $x^2-y^2=2$与直线$x+y=\sqrt{2}$、$x=y=3\sqrt{2}$及直线$y=x$ 所围成的图形绕直线 $y=x$ 旋转所得旋转体的体积。

第七讲　函数方程与不等式的证明（★★）

一、函数方程求解

【例 7.1】设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,当$y=1$时，$z=x$，求$z$及$f(x)$的表达式。

【例 7.2】设有方程 $af(x)+b(f(\frac{1}{x})=cx, |a|\neq|b|$,求$f(x)$

【例 7.3】设函数 $f(x)$ 连续，且有 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$，求$f(x)$

【例 7.4】设 $f(x)$在$[1,+\infty)$ 上连续，$f(1)=3$，且有$\int_x^{xy} f(t)dt=y\int_1^x f(t)dt+x\int_1^y f(t)dt$，求$f(x)$

【例 7.5★】设 $f(x)$ 二阶可导，且有 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x t\cdot f(t-x)dx$，求$f(x)$

【例 7.6★★】设 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$ 上连续且有 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx$，求 $f(x)$

【例 7.6-1★★】设 $f(x)$在$[0,1]$ 上连续且有 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)dx$，求 $f(x)$

【例 7.6-2★★】设 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 存在，且有 $f(x)=5x^3+x^2-2e^{x-1}\lim_{x\to 1} f(x)$，求 $f(x)$

【例 7.6-3★★】设 $f(x,y)$ 在平面区域 D:由$y=x^2$与直线$x=1$及x轴所围图形，且有 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)d\delta$，求 $f(x)$

【例 7.7】设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，$f(0)=0$且$f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ \sqrt{x} & x>1\end{cases}$，求$f(x)$

【例 7.8】设$u=f(xyz)$,$\dfrac{z^3u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^3f'''(xyz)$，求???

【例 7.9】设 $f(x)$ 二阶可导，L 为平面上任一光滑的闭曲线，且

$\oint\limits_L [xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$，求 $f(x)$

二、不等式证明

(1)利用微分中值定理证明

【例 7.2.1】设$b>a>0$，证明:$\dfrac{1-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\dfrac{1}{1+a^2}$

【例 7.2.2★】设在$[0,a]$上$|f''(x)|\le M$，且$f(x)$在$(0,a)$内取得最大值，

证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$

(2)利用函数的增减性（★★）

【例 7.2.3】证明：当$x>0$时,$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

【例 7.2.4】证明：当$0<x<1$时,$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

【例 7.2.5】证明：$b>a>0$时,$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$

(3)利用函数的极值或最值证明

【例 7.2.6】$-\infty<x<+\infty$，证明：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ge\sqrt{1+x^2}$

【例 7.2.7】证明：当$0<x<2$时,$4x\ln x-x^2-2x+4>0$

(4)利用台劳公式证明不等式

【例 7.2.8】设 $f'''(x)$在$[a,b]$上存在，$f'(a)=f'(b)=0$，

证明：$\exists$一个$\xi\in(a,b)$，使$|f''(\xi)|\ge\dfrac{4}{(b-a)^2}\cdot|f(a)-f(b)|$

第八讲　常微分方程

一、一阶微分方程

(1)可分离变量方程

【例 8.1】解下列方程

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+x+\sin(x+y)=0$　　(2) $xy'-y[\ln(xy)-1]=0$

(2)齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(\dfrac{y}{x})$

【例 8.2】解下列方程

(1) $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$　　(2) $(y'-\dfrac{y}{x})\arctan\dfrac{y}{x}=1$

(3)一阶线性微分方程

【例 8.3】解下列方程

(1) $(x+1)y'-ny=(x+1)^{n+1}xe^{-x^2}$　　(2) $y'=\dfrac{1}{\cos y}-\tan y$　　(3) $y'=\dfrac{x}{2x-y^2}$

(4)贝努里方程

【例 8.4】解方程　$y'-\dfrac{4}{x}y=\sqrt{y}x^3$

(5)全微分方程

【例 8.5】解下列方程

(1) $(2xe^y-3x^2)dx+(x^2ey+2y-1)dy=0$　　(2) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

二、可降阶的二阶方程

三、高阶线性微分方程

【例 8.6】解下列方程

(1) $y''+\dfrac{1}{x}y'=\sin x$　　(2) $y''=\dfrac{1+y'^2}{2y}$　　(3) $yy'-y'^2=y^2\ln y$

【例 8.7】设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是如下方程

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y=f(x) \qquad (1)$$

的三个线性无关解，c_1,c_2 为两个任意常数，则方程(1)的通解为[　]

[A] $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_3(x)$　　[B] $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)-(c_1+c_2)y_3(x)$

[C] $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+(1-c_1-c_2)y_3(x)$　　[D] $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)-(1-c_1-c_2)y_3(x)$

【例 8.8★】设 $q(x)<0$，证明：$y''+q(x)y=0$ 的任一非零解至多有一个零点。

四、高阶线性常系数微分方程（★）

【例 8.9★】设 $y_1(x)=x$，$y_2(x)=x+e^{2x}$，$y_3(x)=x(1+e^{2x})$ 是一二阶方程 $y''+a_1y'+a_2=f(x)$ 的三个线性无关解，求通解及方程的具体形式。

【例 8.10】设 $y''+2my'+n^2y=0, y(0)=a, y'(0)=b$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$. (其中a,b,m,n均为常数, $m>n>0$)。

【例 8.11】解方程：$x^2y''+3xy'-sy=x\ln x$

第九讲　多元函数微分学

一、概念、定理

【例 9.1】求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3+3x^2y-2xy}{x+y}$

二、各类函数偏导数的求法

(1)显函数的偏导数

【例 9.2】<TO BE FIXED>

【例 9.3】

【例 9.4】设 $x^2+y^2+z^2=xyf(z^2)$，其中 f 可微，求 $xz'_x+yz'_y$

【例 9.5】设 $f(x,y,z)$为k 次齐次函数，即 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，求 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}$

【例 9.6】设 $z=f(x^2+y^2, x\sin y)$，f 具有连续的二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【例 9.7】设通过变换$\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$将方程：$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$变为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，确定常数$a$。（二阶偏导连续）

(2)隐函数微分法

【例 9.8】设有方程 $F(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x})=0$，求$xz'_x+yz'_y$

【例 9.9】设 $y=f(x,t^2)$，t 由方程 $F(x^2,y,t)=0$ 确定为 x,y 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$

三、偏导数在几何中的应用（填空）

四、多元函数的极值

【例 9.10】设 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$，D为由直线$x+y=6$及x轴,y轴围成的封闭区域，求 z 在 D 上的极值。

【例 9.11】在抛物线 $y=x^2$ 上求一点，使其到直线 $y=x-4$ 的距离最短。

【例 9.12】求两球面 $x^2+y^2+z^2=16$与$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z=24$ 的交线的最高点与最低点。

【例 9.13】设 $x>0, y>0, z>0$，求函数 $u=\ln x+2\ln y+2\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大

值，并由此证明对任意$a>0,b>0,c>0$，有$ab^2c^3 \le 108(\frac{a+b+c}{6})^6$

第十讲　重积分

一、二重积分的几何意义及其性质

【例 10.1】计算下列积分（不考虑变量替换）

(1)$\iint\limits_D x^2+y^2 d\delta \quad D: x^2+y^2 \le a^2$　　(2)$\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})d\delta \quad D: x^2+y^2 \le a^2$

【例 10.2】计算$I=\iint\limits_D \sin(x-y)d\delta \qquad D:\begin{cases}0<x\le m\\0\le y\le \pi\end{cases}$

二、二重积分计算

【例 10.3】<TO BE FIXED>

【例 10.4】极坐标系下的累次积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(M)\rho d\rho$在直角坐标系为[　]

[A]$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　[B]$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

[C]$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$　　[D]$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dx$

【例 10.5】更换下列积分次序

(1)$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　(2)$I=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$

【例 10.6】计算下列积分

(1)$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx \quad (a>0,b>0)$　(2)$I=\int_1^2 dy\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dx+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\frac{\sin \pi x}{2y}dy$

【例 10.7】<TO BE FIXED>

【例 10.8】

【例 10.9】求两锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}, z=2-\sqrt{x^2+y^2}$公共部分的体积，并求形体表面积。

【例 10.10】计算$I=\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy \qquad D:\begin{cases}|x|\le 1\\0\le y\le 2\end{cases}$

【例 10.11】设$f(x)$连续，$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2\ (t>0)} f(x^2+y^2)dxdy$求$F'(0),F''(0)$

第十一讲　无穷级数

【例 11.1】判别下列级数的敛散性，收敛时求其值

(1)$\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　　(2)$\sum\frac{n}{(n+1)!}$

【例 11.2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$

二、数项级数

【例 11.3】判别下列级数的敛散性

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^n}$　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)!}{n^n}$　　(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{\pi}{n})$

(4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$　　(5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+p^n}$　　(6)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

【例 11.4】判别级数的敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$

【例 11.5】设 $\lambda>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}}{x^{\lambda}}dx$ [　]

[A]发散　　[B]条件收敛　　[C]绝对收敛　　[D]敛散性与 λ 有关

【例 11.6】讨论级数 $\sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$ 的敛散性

【例 11.7】设恒有 $a_n<b_n<c_n$，$\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 收敛，求证 $\sum b_n$ 收敛

【例 11.8】设 $f_0(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上连续，求对于 $\forall x\in[0,a]$ 有 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(x)dx$

证明：无穷级数 $\sum f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对收敛。

【例 11.9】设序列 $\{na_{n+1}\}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

三、幂级数

【例 11.10】求收敛域

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{2x-1}{x+1})^n$　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n^x}$

【例 11.11】求下列级数的收敛域，收敛半径

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n-3^n}$　　(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$　　(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{(2n+1)!}$

四、将一个函数展成幂级数（★）

【例 11.12】将下列函数在指定点处展成幂级数

(1)$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，在$x=0$处

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$，在$x=2$处

(3)$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}$，在$x=1$处

求级数的和（★）

(1)求幂级数的和函数

【例 11.13】求和函数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n)!}\cdot(-1)^n$$

【例 11.14】求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$的和函数。

⑵数项级数求和

【例 11.15】求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{2^n}$的和

第十二讲　曲线曲面积分

【例 12.1】求下列积分

$$(1)\int_L(x^2+y^2)dl \quad L:x^2+y^2=a^2 \quad (2)\int_L(3x^2+4y^2)dl \quad L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

【例 12.2】<TO BE FIXED>

【例 12.3】计算$I=\int_L xydx+\frac{2x^2y}{\sqrt{4x^2+y^2}}dy \qquad L:4x+y^2=4$　从A(1,0)到B(0,-2)

【例 12.4】计算$I=\int_L(x+y)dx+(x-z)dy+zydz \qquad L:x^2+y^2=a^2$与平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{h}=1$的交线，$a>0,h>0$，从$x$轴正向看去 L 为逆时针方向。

【例 12.5】计算$I=\int_L(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz$

$$L:沿螺旋线\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=\dfrac{h}{2\pi}t\end{cases}$$ 从(a, 0, 0)到(a, 0, h)（a, b>0)

【例 12.6】计算$I=\int_L\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+2[2x+y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})dy$,

$L:$沿上半圆弧$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，从$A(a,0)$到B(−a, 0)

【例 12.7】计算$I=\int_L(e^x\sin y-2x)dx+(e^2\cos y-3y^2)dy$，是通过$A(1,-2),B(3,0),C(2,2)$三点的圆弧从 A 到 C

【例 12.8】计算 $I=\int_L(\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2})dx+(\frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2})dy$

【例 12.4.1】计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(4x+3y+6z)ds$　　$\Sigma:\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$

【例 12.4.2】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)ds$　　$\Sigma:$锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面$z=1$所围成的形体的表面。

【例 12.4.3】求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+1)dydz+ydzdx+dxdy$，　$\Sigma:x+y+z=1$，法线指向原点

【例 12.4.4】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}ydydz-xdzdx+z^2dxdy$，

$\Sigma:$锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1,z=2$所截平面的下侧。

【例 12.4.5★】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，　$\Sigma:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧。

【例 12.4.6】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}4xzdydz-2yzdzdx+(1-z^2)dxdy$，　$\Sigma:$平面曲线 $L:\begin{cases}z=e^y\\x=0\end{cases}$　$(0\le y\le a$ 绕 z 轴旋转所得旋转面，取下侧。

【例 12.4.7】计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y}}dxdy,$　$\Sigma:$锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1,z=2$ 所围成图形的表面的外侧。

【例 12.4.8】设 $f(x,y,z)$ 连续，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+f)dydz+(y+2f)dzdx+(z+f)dxdy$，$\Sigma:x-y+z=1$ 在第四象限部分，取上侧。

1.1 D

1.2 3

1.3 $a=-1,b=\frac{1}{2}$

1.4 1/4

1.5 36

1.6 0

1.7 1/2

1.8 分情况讨论。0≤x≤1 时，1
1≤x≤2 时，x
x＞2 时，　　x*x/2

1.9 0

1.10 $e^{-(a+b)}$

1.11 (1) $e^{1/2}$　　(2)10

1.12 （令 $f(x)=5x^3+4x^2+ax+b$ ）

$f(x)=5x^3+4x^2+3x$

1.13 －1

1.14 $a=-1,b=0,c=1/2$

1.15 分段讨论，$a=1,b=0$

1.16 $(1)-\frac{1}{12}\quad(2)***\quad(3)-1\quad(4)0$

1.17 ***

1.18 (1) $\frac{2}{3}$　　(2) $\frac{1}{2}$

1.19 (1) $3\ln 2$　　(2)***

1.20 (1)***　(2)***　(3)1

1.21 $(1)\sqrt[3]{abc}\quad(2)***$

1.22 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.23 $(1)\frac{5}{2}\quad(2)1\quad(3)\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx\quad(4)\frac{4}{5}$

1.24 $(1)\frac{1}{1-x}\quad(2)\frac{1}{2}\quad(3)0\quad(4)e^{\int_0^1\ln(1+x^2)dx}$

2.1 $(1)-3f'(x_0)\quad(2)-5f'(x_0)\quad(3)2f'(x_0)$

2.2 3

2.3 0

2.4 (1)－99!　　(2)***

2.5 0

2.6 $f(x)=ax\ln x$

2.7 C

2.8 不可导

2.9 $\varphi'''(y)=\frac{3f''^2(x)-f'(x)\cdot f'''(x)}{[f'(x)]^5}$

2.10 $\frac{dy}{d(x^2)}=\cos x^2,\frac{dy}{d(x^3)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos x^2}{x}$

2.11 π

2.12

$(1)f'(x)\quad(2)-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\frac{1}{x}f(x)\quad(3)f(x)$

2.13

$y'=\sin^2(x-y),y''=2\sin(x-y)\cos^3(x-y)$

2.14 $y-\frac{1}{x^2}y+(x+\frac{1}{x})(-\frac{x}{y})$（未化简完）

2.15 ***

2.16 $\frac{dy}{dx}=-e^{t^4},\frac{d^2y}{dx^2}=\ldots$

2.17 8/t-4,…

2.18 $F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du & x<0\\ -\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2 & x>0\\ 1 & x=0\end{cases}$

2.19 a=2,　b=-1

2.20 ***

2.21 $y^{(n)}=(x+2\_+\frac{27}{4}\cdot(x-3)^{-1}+\frac{1}{4}\cdot(x+1)^{-1}$

2.22 ***

3.1 $(1)-\frac{2}{1-x^2}\quad(2)(\arctan\sqrt{x})^2+C$

$(3)\frac{2}{3}[\ln(1+x)-\ln x]^{3/2}+C\quad(4)$

3.2 $\frac{1}{2}(\frac{f(x)}{f'(x)})^2+C$

3.3 (1)(2)***(3) $-\frac{x}{\ln x}+C$ (4)***

3.4

$(1)-\frac{1}{3a^2}(\frac{a^2}{x^2}-1)^{\frac{3}{2}}+C$ (2)***(3) $\frac{1}{a^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}+C$

3.5

$(1)I=-\frac{1}{4}(4x^2-2x+1)e^{-2x}$

$(2)I=\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$

3.6

$(1)x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$

(2)(3)***

3.7

$(1)I=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

$(2)I=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\arctan x+C$

(3)***

3.8 $I=\ln(x+1)\ln(x+2)+C$

3.9 a+2b+3c=0

3.10 ***

3.11 ***

3.12 ***

3.13 ***

4 略

5.1 5/2≤。。。≤7/2

5.4 f’(0)

5.7 $2(\arctan 2-\arctan 1)$

5.8 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3}{8}\ln 2$

5.9 ***

5.10

$x-\ln(1+e^x)+\ln 2 \quad (x\le 1),$

$\int_0^1\frac{1}{1+e^t0}dt+\int_0^x\ln t dt \quad (x>1)$

5.11 $1-\frac{1}{e}+\ln 2$

5.12 ***

5.13 $\frac{1}{2}(e^{a^2}-1)$

5.14 $\int_0^2 y\cdot e^{-y^2}dy$

5.15 A/2

5.16 0

5.18 $\pi/4$

5.6.1 $\alpha\ne 1$时，发散，$\alpha=1$时，收敛，和为2

5.6.2 $\frac{\pi}{4e^2}$

5.6.3 $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$

6.2 $(0,1]$

6.4 D

6.5 极大值 $f(-\frac{1}{\sqrt{2}})$，极小值 $f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

6.6

$y=b-2 \quad (b-2\ge 0) \quad \min=2\sqrt{b-1}$

$y=0 \quad (b-2<0) \quad \min=|b|$

6.7 凹的

6.8 ***

6.9 水平渐近线：$y=\pm\frac{2}{\pi}$

铅直渐近线：$x=0$

7.1 $f(x)=x^3+3x^2+3(\sqrt[3]{x}-1)$

7.2 $f(x)=\frac{1}{a^2b^2}(acx-\frac{bc}{x})$

7.3 $f(x)=e^x$

7.4 ***

7.5 ***

7.6 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$

7.6-1 ***

7.6-2 $f(x)=5x^3+x^2-4e^{x-1}$

7.6-3 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$

7.7 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ 2e^{\frac{1}{2}x} & x>0 \end{cases}$

8.1 $(1)\csc(x+y)-\cot\tan(x+y)=cx$
$(2)xy=e^{cx}$

8.2 $(1)x+ye^{\frac{x}{y}}=c$ (2)***

8.3

(1)*** $(2)\sin y=ce^{-x}+1$ $(3)x=(-\ln y+c)y$

8.5

$(1)x^2e^y-x^3+y^2=C$ $(2)x^2-\frac{1}{y}+1+\frac{x^2}{y^3}-x^2=C$

8.6 (1)*** $(2)\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=\pm x+c_2$
$(3)\ln y=c_1e^x+c_2e^x$

8.7 C

8.9 通解：$Y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+x$

方程：$y''+4y'+4y=f(x)$

8.10 $\frac{1}{n^2}(2ma+b)$

8.11 $y(x)=C_1x^{-3}+C_2x+\frac{1}{16}\ln x(2\ln x-1)x$

9.1 极限不存在

9.2

9.3

9.4 $xz'_y+yz'_x=\frac{z}{1-xyf'(z^2)}$

9.5 $kf(x,y,z)$

9.6

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'_1+4x^2f''_{11}+4x\sin yf''_{12}+\sin^2 yf''_{22}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$***

9.7 $a=3$

9.8 0

9.9 ***

9.10 $f=4, f=-64$

9.11 ***

9.12 最高点(0, 0, 4)，最低点$(\frac{8}{3},\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$

10.1 $(1)\frac{\pi}{4}a^2$ $(2)\frac{\pi}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})a^4$

10.2 0

10.4 C

10.5 $(1)I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

$$(2)I=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx$$

10.6

$(1)\ln\frac{1+b}{1+a}$ $(2)-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}ydy=$***

10.9 ***

10.10 ***

10.11 $F'(0)=0$ $F''(0)=2\pi f(0)$

11.1 (1)*** (2)1

11.2 0

11.3 (2)发散

11.4 收敛

11.5 C

11.6

当$\alpha\ne 0,\pm1,\pm2,\cdots$时，发散
当$\alpha=0,\pm1,\pm2,\cdots$时，$\beta$=0时，绝对收敛
$\beta\ne 0$时，条件收敛

11.10 $(1)[0,2)$ $(2)x=0$及$(1,+\infty)$

11.11 ***

11.12 ***

11.13

$(1)f(x)=\begin{cases} \frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x} & x\in[-2,0)\cup(0,2) \\ \frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$

$(2)\frac{1}{2}[x^2\cos x-x^2]'$

11.14 $f'(x)-xf(x)=1\Rightarrow f(x)$

11.15 7

12.1 (1)πa^3 (2)$12a$

12.3 ***

12.4 $ah\pi(1+h)$

12.5 $-\frac{1}{3}h^3$

12.6 $2\pi ab$

12.7 ***

12.8 ***

12.4.1 $12\sqrt{61}$

12.4.2 $(\sqrt{2}+1)\frac{\pi}{2}$

12.4.5 $\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3$

12.4.6 $-\pi a^2(1-e^{2a})$